Correction

5 octobre 2015

1 Rappel probabilité

1.1 Exercice 1

L'univers correspondant à l'expérience aléatoire "lancer de deux pièces équilibrées et distinguables" s'écrit

$$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$$

où P et F correspondent respectivement à "pile" et "face", et où les premières et deuxièmes composantes des couples correspondent respectivement à la première et à la deuxième pièces (elles sont distinguables). Comme les pièces sont distinguables et équilibrées, les conditions sont requises pour que l'on puisse munir l'espace des événements $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de l'équiprobabilité. Pour évaluer la probabilité d'un événement, il suffira alors de compter le nombre de ses éléments (nombre de cas favorables) et de diviser par le nombre des éléments de Ω (nombre de cas possibles), qui est égal à 4.

Les événements s'expriment alors de la façon suivante :

$$A = \{(P,P),(P,F)\}, \quad B = \{(P,P),(F,P)\}, \quad C = \{(P,F),(F,P)\},$$

et leurs probabilités respectives sont

$$\mathbf{Pr}(A) = \mathbf{Pr}(B) = \mathbf{Pr}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour vérifier l'indépendance deux à deux, il nous faut alors expliciter puis dénombrer toutes les intersections :

$$A \cap B = \{(P,P)\}, \quad A \cap C = \{(P,F)\}, \quad B \cap C = \{(F,P)\},$$

d'où

$$\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A \cap C) = \mathbf{Pr}(B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Et comme deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A)\mathbf{Pr}(B)$, alors on en déduit l'indépendance deux à deux de ces trois événements.

Pour la mutuelle indépendance, il reste à vérifier que

$$\mathbf{Pr}(A \cap B \cap C) = \mathbf{Pr}(A)\mathbf{Pr}(B)\mathbf{Pr}(C),$$

ce qui compte tenu que $\mathbf{Pr}(A \cap B \cap C) = \mathbf{Pr}(\emptyset) = 0$ est évidemment faux !

Nous avons donc un exemple de la non équivalence entre l'indépendance deux à deux et la mutuelle indépendance. Notons que si la pièce n'était pas équilibrée (on obtient "pile" avec une probabilité p, où $p \neq \frac{1}{2}$, C n'aurait été indépendant ni de A ni de B.

1.2 Exercice 2

Univers : $\Omega = \{(G; G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$. On fait comme hypothèses d'une part que les deux enfants (garçon : G et fille : F) sont "distinguables" (on peut parler du "premier" et du "deuxième"), et d'autre part que chaque sexe a la même probabilité que l'autre d'apparaître. On peut donc munir l'espace d'événements $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de l'équiprobabilité. Soient alors les événements suivants :

$$A = \text{"le premier enfant est un garçon"} = \{(G, G), (G, F)\},$$

$$B = \text{"l'un des deux enfants (au moins) est un garçon"} = \{(G, G), (G, F), (F, G)\},$$

$$C = \text{"les deux enfants sont des garçons"} = \{(G, G)\}.$$

On demande de calculer successivement $\mathbf{Pr}(C|A)$ et $\mathbf{Pr}(C|B)$.

La probabilité conditionnelle de A sachant B étant par définition (si $\mathbf{Pr}(B) \neq 0$)

$$\mathbf{Pr}(A|B) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)},$$

alors on en déduit facilement que

$$\mathbf{Pr}(C|A) = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

comme on pouvait s'y attendre, et que

$$\mathbf{Pr}(C|B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3},$$

qui peut être contraire à la première intuition...

1.3 Exercice 3

Soit les événements

$$T = \text{"le test appliqué est positif"},$$

$$A = \text{"La personne testée est atteinte de la maladie"}.$$

Alors l'énoncé nous apporte les informations suivantes :

$$\mathbf{Pr}(T|A) = \frac{99}{100}, \quad \mathbf{Pr}(T|A^c) = \frac{1}{100}, \quad \mathbf{Pr}(A) = \frac{1}{5000},$$

et l'on doit calculer $\mathbf{Pr}(A|T)$.

Comme (A, A^c) forme une partition de l'univers, on peut utiliser la formule de Bayes, qui nous donne

$$\mathbf{Pr}(A|T) = \frac{\mathbf{Pr}(T|A)\mathbf{Pr}(A)}{\mathbf{Pr}(T|A)\mathbf{Pr}(A) + \mathbf{Pr}(T|A^c)\mathbf{Pr}(A^c)},$$

ce qui se calcule facilement (sachant que $\mathbf{Pr}(A^c) = 1 - \mathbf{Pr}(A)$) :

$$\mathbf{Pr}(A|T) = \frac{99}{99 + 4999} \simeq 2\%...$$

Morale : les "statistiques" données sur la fiabilité peuvent ne pas vouloir dire grand chose...

2 Théorie de l'information

2.1 Information

Calculer pour la langue française la quantité d'information apportée par chaque voyelle. Comparer ces quantités à la consonne apportant le plus et le moins d'information.

2.2 Entropie

- $\mathbf{Pr}(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$
-

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{Pr}(i) \log \mathbf{Pr}(i) \\ &= -\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \log \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= -\log \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{0.5}{(1-0.5)^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2.3 Entropie jointe et conditionnelle

- $H(X) = -2/3 \log 2/3 - 1/3 \log 1/3 = \log 3 - 2/3 = 0.9183$
- $H(Y) = -1/3 \log 1/3 - 2/3 \log 2/3 = 0.9183$

2.4 Distance de Kullback-Leibler

$$D(p||q) = (1-r) \log \frac{1-r}{1-s} + r \log \frac{r}{s}$$

$$D(q||p) = (1-s) \log \frac{1-s}{1-r} + s \log \frac{s}{r}$$

$D(p||q) = 0.2075$ $D(p||q) = 0.1887$