Quelques rappels concernant

LA PROPAGATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

(par Jacques Verdier, dept GE, INSA Lyon)

I- Equations de Maxwell

Elles régissent les variations des vecteurs ($\underline{\vec{e}}$, $\underline{\vec{h}}$, $\underline{\vec{d}}$, $\underline{\vec{b}}$) dans le temps et dans l'espace, compte tenu de l'existence de sources primaires ($\underline{\vec{i_p}}$, $\underline{q_p}$) et des courants et charges qu'elles créent ($\underline{\vec{i_C}}$, $\underline{q_C}$). En valeurs instantanées complexes on écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{e}}) = -\frac{\partial \underline{\vec{b}}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{h}}) = \frac{\partial \underline{\vec{d}}}{\partial t} + \underline{\vec{i}}_P + \underline{\vec{i}}_C$$

$$\mathrm{div}(\underline{\vec{d}}) = \underline{q}_P + \underline{q}_C \qquad \mathrm{div}(\underline{\vec{b}}) = 0$$

Elles doivent être complétées par l'équation de conservation des charges et des courants :

$$\mathrm{div}(\underline{\vec{i}}_P + \underline{\vec{i}}_C) + \frac{\partial(\underline{q}_P + \underline{q}_C)}{\partial t} = 0$$

En règle quasi-générale, on se trouve en dehors du domaine où se trouvent les sources primaires. En conséquence, les équations restent valables en ayant pris soin de ne plus tenir compte des sources ($\underline{\vec{i_p}}$, $\underline{q_p}$).

Si le milieu considéré est homogène et isotrope les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{e}}) = -\underline{\mu}\frac{\partial \underline{\vec{h}}}{\partial t} \qquad (\underline{\vec{b}} = \underline{\mu}\underline{\vec{h}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{h}}) = \sigma\underline{\vec{e}} + \varepsilon\frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial t} \qquad \left(\underline{\vec{d}} = \varepsilon\underline{\vec{e}} \quad \underline{\vec{i}}_c = \sigma\underline{\vec{e}} \quad \underline{\vec{i}}_d = \varepsilon\frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial t}\right)$$

$$\mathrm{div}(\underline{\vec{d}}) = \underline{q}_c \qquad \mathrm{div}(\underline{\vec{b}}) = 0$$

En régime sinusoïdal, elles deviennent :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{E}}) = -j\omega\underline{\mu}\underline{\vec{H}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\underline{\vec{H}}) = \sigma\underline{\vec{E}} + j\omega\underline{\varepsilon}\underline{\vec{E}}$$

$$\mathrm{div}(\underline{\vec{D}}) = \underline{Q}_C \qquad \mathrm{div}(\underline{\vec{B}}) = 0$$

$\underline{\vec{E}}$, $\underline{\vec{H}}$, $\underline{\vec{D}}$, $\underline{\vec{B}}$, $\underline{Q_C}$ sont les amplitudes complexes des grandeurs correspondantes.

II- **Permittivité équivalente d'un milieu diélectrique à pertes**

- *Milieu sans perte* (σ = 0 et ε réel)

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\underline{H}}\right) = j\omega\varepsilon\vec{\underline{E}}}$$

- *Milieu avec pertes conductrices* (σ fini et ε réel)

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\underline{H}}\right) = \sigma\vec{\underline{E}} + j\omega\varepsilon\vec{\underline{E}} = j\omega\underline{\varepsilon}_e\vec{\underline{E}}}$$

avec :

$$\boxed{\underline{\varepsilon}_e = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}$$

$\underline{\varepsilon}_e$ est la permittivité équivalente ; elle peut s'écrire également sous la forme :

$$\boxed{\underline{\varepsilon}_e = \sqrt{\varepsilon^2 + (\sigma/\omega)^2}\,\exp(-j\delta)}$$

avec : $\boxed{\delta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}$ δ est l'angle de pertes du diélectrique et

$\boxed{\mathrm{tg}(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$ tg δ est le facteur de pertes du diélectrique

- *Milieu avec pertes conductrices et diélectriques* (σ fini et ε complexe)

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{\underline{H}}\right) = \sigma\vec{\underline{E}} + j\omega\underline{\varepsilon}\vec{\underline{E}} = j\omega\underline{\varepsilon}_e\vec{\underline{E}}}$$

avec :

$$\boxed{\underline{\varepsilon}_e = \varepsilon' - j\frac{\sigma_e}{\omega} \quad \text{et} \quad \sigma_e = \sigma + \omega\varepsilon''}$$

$\underline{\varepsilon}_e$ est la permittivité équivalente et σ_e est la conductivité équivalente.

III- **Interface entre deux milieux**

- Interface sans sources entre deux milieux quelconques

Ces deux milieux sont caractérisés par (ε_1, μ_1, σ_1) et (ε_2, μ_2, σ_2) et sont séparés par une interface sur laquelle il n'y a ni charges, ni courants. Cas des diélectriques parfaits ou à pertes et des conducteurs **imparfaits**.

$\Rightarrow$ Continuité des composantes **tangentielles** des champs ($\vec{\underline{E}}$, et $\vec{\underline{H}}$)

$\Rightarrow$ Continuité des composantes **normales** des inductions ($\vec{\underline{D}}$, et $\vec{\underline{B}}$)

- Interface avec un conducteur parfait

Le milieu 2 est caractérisée par $\sigma = \infty$. Les champs $\vec{\underline{E}}$ et $\vec{\underline{H}}$ sont nuls à l'intérieur du conducteur (profondeur de pénétration $\delta = 0$). Il y a, à l'interface des deux milieux, apparition de courants superficiels $\vec{\underline{I}}_S (A/m)$ et de charges superficielles $Q_S (Cb/m^2)$.

Sur l'interface Σ, nous avons les relations suivantes :
(indice 1 pour le milieu 1 et $\vec{n}$ normale à Σ, **orienté de 2 $\rightarrow$ 1**) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{n} \wedge \vec{\underline{E}}_1 = 0 \\ \vec{n} \wedge \vec{\underline{H}}_1 = \vec{\underline{I}}_S \\ \vec{n}.\vec{\underline{D}}_1 = \underline{Q}_S \\ \vec{n}.\vec{\underline{B}}_1 = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ Composante **tangentielle** du champ $\vec{\underline{E}}$ est nulle.

$\Rightarrow$ Composante **normale** du champ $\vec{\underline{H}}$ est nulle.

Remarque : Ces équations et ces conclusions restent valides pour un bon conducteur caractérisé par $\delta < \lambda/100$, ce qui est vérifié pour $\sigma > 100/12\lambda$.

- Interface étant un feuillet conducteur

Ces deux milieux sont caractérisés par (ε_1, μ_1, σ_1) et (ε_2, μ_2, σ_2) et sont séparés par une couche conductrice d'épaisseur **nulle** si $\sigma = \infty$ ou d'épaisseur < **δ/10** si la conductivité est finie. Dans ces conditions le feuillet est porteur de courants et de charges superficiels $\underline{\vec{I}}_S$ et $\underline{Q}_S$. En conséquence, nous obtenons les relations suivantes ($\vec{n}$ normale à Σ, **orienté de 2 → 1**) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{n} \wedge (\underline{\vec{E}}_1 - \underline{\vec{E}}_2) = 0 \\ \vec{n} \wedge (\underline{\vec{H}}_1 - \underline{\vec{H}}_2) = \underline{\vec{I}}_S \\ \vec{n}.(\underline{\vec{D}}_1 - \underline{\vec{D}}_2) = \underline{Q}_S \\ \vec{n}.(\underline{\vec{B}}_1 - \underline{\vec{B}}_2) = 0 \end{array}}$$

IV- Propagation des OEM en espace libre diélectrique

- Cas des diélectriques sans perte

Une onde OEM est constituée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{H}$ qui forment un trièdre direct avec la direction de propagation ; soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de cette propagation, nous avons :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{H}} \wedge \vec{u}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\underline{\vec{H}} = \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}$$

ε et μ sont la permittivité et la perméabilité magnétique du milieu ou s'effectue la propagation. Dans le cas de l'air ou du vide :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 1/(36\pi.10^9) \text{ en (F/m)} \qquad \text{et} \qquad \mu = \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ en (H/m)}$$

D'autre part $\vec{E}$ et $\vec{H}$ forment un plan perpendiculaire à la direction de propagation que l'on appelle le plan d'onde.

Les équations de propagation pour les champs $\underline{\vec{e}}$ et $\underline{\vec{h}}$ (exprimés en valeurs instantanées complexes) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\boxed{\Delta\underline{\vec{e}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{\vec{e}}}{\partial t^2} = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Delta\underline{\vec{h}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{\vec{h}}}{\partial t^2} = 0}$$

Elles deviennent dans le cas où la propagation se fait selon la direction Oz :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{\vec{e}}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \underline{\vec{e}}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \underline{\vec{h}}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \underline{\vec{h}}}{\partial t^2} = 0}$$

Le rapport $\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$ représente la vitesse de propagation de l'onde. Sachant que généralement on considère que $\mu_r = 1$ (sauf milieux ionisés et magnétiques) on écrit :

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}}$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et ε_r est sa permittivité relative ou constante diélectrique.

En régime sinusoïdal, ces équations admettent des solutions de la forme :

$$\boxed{\underline{\vec{e}}(z,t) = \underline{\vec{E}} \exp j(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{\vec{h}}(z,t) = \underline{\vec{H}} \exp j(\omega t - kz)}$$

avec : $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ (paramètre de phase de l'onde)

Le rapport des modules de $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{H}}$ exprime l'impédance d'onde du milieu considéré (en Ω) :

$$\boxed{\frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{H}}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \zeta}$$

c'est une quantité réelle.

Remarques : - Le même formalisme mathématique peut être appliqué aux milieux à pertes en prenant soin de tenir compte de la permittivité équivalente. La solution de l'équation de propagation se met sous la forme $\underline{\vec{e}} = \underline{\vec{E}} \exp(j\omega t)\exp(-\gamma z)$ où $\gamma = \alpha + j\beta$ est le paramètre de propagation. Dans un milieu à faibles pertes ($\sigma_e / \omega\varepsilon' << 1$) on note que $\alpha = \beta = \sqrt{\pi\mu\sigma f}$.

L'impédance d'onde utilise la permittivité équivalente ; elle est par conséquent complexe dans un milieu à pertes.

- Dans un conducteur imparfait, on peut faire la même remarque sur la solution de l'équation de propagation avec $\alpha = \beta = \sqrt{\pi\mu\sigma f}$

V- <u>**Puissance et régime d'ondes**</u>

Le vecteur de Poynting complexe $\boxed{\vec{\underline{P}} = \frac{1}{2}\vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{H}}^{*}}$ (en W/m²) permet de déterminer la puissance transportée par une onde EM et ainsi en déduire le régime d'ondes associés :

- <u>Pour une onde progressive pure</u>, pour laquelle $\vec{\underline{E}}$ et $\vec{\underline{H}}$ sont en **phase** (leur amplitude est réelle), ce vecteur est une **quantité réelle** : *cas d'un diélectrique sans perte*.

- <u>Pour une onde semi-stationnaire,</u> pour laquelle $\vec{\underline{E}}$ et $\vec{\underline{H}}$ ne sont pas en **phase** (leur amplitude est complexe), ce vecteur est une **quantité complexe** et la densité de puissance active correspond à la partie réelle du vecteur de Poynting complexe : *cas d'un diélectrique avec pertes*.

- <u>Pour une onde stationnaire</u>, pour laquelle $\vec{\underline{E}}$ et $\vec{\underline{H}}$ sont en **quadrature** ce vecteur est une quantité imaginaire pure et la puissance est une puissance réactive.

Lors de l'étude de réflexion des ondes EM, l'état EM en un point quelconque du diélectrique résulte de la superposition de ces deux ondes incidente et réfléchie.

- <u>Réflexion sur un plan conducteur parfait sous **incidence normale** :</u>

  La propagation est caractérisée par l'existence d'<u>un régime d'ondes stationnaires pures</u>. Les vecteurs $\vec{\underline{E}}$ et $\vec{\underline{H}}$ sont en **quadrature dans le temps et dans l'espace.**

- <u>Réflexion sur un plan conducteur sous **incidence oblique**, cas TE ou TM :</u>

La propagation est caractérisée par l'existence d'<u>un régime d'ondes stationnaires pures</u> dans une direction perpendiculaire à la surface d'interface Σ, d'<u>un régime d'ondes progressives</u> dans la direction Oz. Dans une direction quelconque, on observe <u>un régime d'ondes semi-stationnaires</u>.