TD1-processus aléatoires

INSA
Département Télécommunications, Services & Usages
4 TC ; 2007-2008

I. Introduction (A LIRE ATTENTIVEMENT)

Ce 1er TD de WCO est conçu comme une petite remise en marche des cellules grises encrassées pendant l'été. L'étude des systèmes de communication, et de leurs performances, nécessite de travailler avec les processus aléatoires. Nous utiliserons par la suite ces notions, il est donc important de savoir les manipuler.

Les concepts principaux de densité, d'inter- ou d'auto-corrélation sont revus dans le contexte des processus aléatoires. Remarquez bien la différence entre les définitions associées aux processus aléatoires, et les définitions classiques utilisées pour les signaux déterministes. Nous revenons aussi sur la notion d'estimation.

Le premier exercice est une mise en jambe, utilisant les variables aléatoires. Pour vous remettre dans le bain, rappelez-vous la différence entre probabilité et variable aléatoire, puis revoyez les relations et les propriétés des fonctions densité de probabilité (qu'on notera simplement densité), et des fonctions de répartition.

La question (d) demande d'exploiter Matlab. Ce n'est pas une qestion subsidiaire. Il est fondamental de prendre l'habitude de vous appuyer sur ce genre d'outil, pour réfléchir et pour valider vos résultats.

Vous devrez rendre en TD les réponses aux questions II(a-d).

Nous donnons parfois des exercices d'approfondissement. Ils ne sont pas faits en TDs, mais doivent vous inciter à réfléchir et à aller plus loin.

II. Petits rappels sur les variables aléatoires

a) Rappelez la formule générale de la densité d'une fonction composée y=g(x). Donnez les conditions sur la fonction g.

b) La densité d'une variable X est $f_x(x)$. Soit la variable Y=aX+b, avec a<0. Déterminer la densité de y en fonction de celle de x.

c) Soit X, une v.a. Normale centrée et de variance unitaire. Déterminer la densité de $Y=aX^3+b$; a>0

d) Ecrivez une fonction Matlab qui permet de calculer la densité de Y de la question précédente, à partir de la fonction *randn.m*. Vous donnerez le code et tracez la densité obtenue, ainsi que la fonction de répartition.

e) Soient X_r et X_i, 2 v.a. statistiquement indépendantes, normales et centrées de même variance. Montrer qu'une transformation rotationnelle de la forme : $Y_r + j \cdot Y_i = \left(X_r + j \cdot X_i\right) \cdot e^{j\Phi}$, conduit à une autre paire de v.a. Y_r et Y_i, normales et centrées elles aussi et ayant la même densité.

Indication : on écrira, et on identifiera la matrice A : $\begin{bmatrix} Y_r \\ Y_i \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} X_r \\ X_i \end{bmatrix}$

Généralisation : soit 2 vecteurs X et Y à n dimensions. X est un vecteur aléatoire de densité normale multi-variée. Quelles conditions la matrice A doit-elle vérifier pour que Y ait la même densité que X ?

f) *Théorème Central Limite* : Soient un ensemble de v.a. $X_i ; i \in [1; N]$, identiquement distribuées, centrées et statistiquement indépendantes, de même variance σ^2.

Montrez que la v.a. définie par : $Y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} X_i$ tend vers une loi normale, que vous préciserez, quand N tend vers infini. C'est une version du théorème central limite.

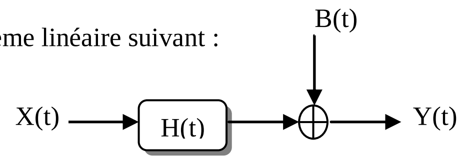
Approfondissement :

La v.a. Y est définie par : $Y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les Xi sont des v.a. de Bernouilli statistiquement indépendantes de paramètre p.

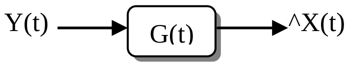
- Déterminer les moments d'ordre 1 et 2 : E(Y) et E(Y^2).
- Vérifiez le théorème central limite, par simulation sous Matlab. Comparez l'évolution de la densité résultante avec une loi normale.

III. Estimation de processus aléatoires

Soit le système linéaire suivant :



Où X(t) est un processus aléatoire à estimer, H(t) le système d'observation, linéaire et stationnaire, B(t) est un bruit BBAG et Y(t) est l'observation.
On veut estimer X(t) par une méthode linéaire qui peut se représenter par :



Le but de l'exercice est de trouver le meilleur estimateur au sens des moindres carrés MSE

III-1. Préliminaires

a) Rappelez la définition de l'inter-corrélation des processus aléatoires.

b) Etablissez la relation entre E(X(t)) et E(Y(t)).

c) Evaluez : $\Phi_{xy}(\tau), \Phi_{yx}(\tau), \Phi_{yy}(\tau)$

d) Donnez les mêmes résultats, lorsque le système considéré est un système numérique.

e) Démontrez le résultat fondamental suivant : $\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot \Phi_{xx}(f)$

Remarque : Comment peut-on utiliser ce résultat pour les systèmes de télécommunication ?

III-2. Estimation

On considère uniquement le cas d'un système numérique.
Le critère MSE est donné par :

$$J(\theta) = E\left\langle |\varepsilon_k|^2 \right\rangle \quad \text{avec } \varepsilon_k = x_k - \hat{x}_k$$

a) Démontrez que minimiser J(θ) conduit à imposer : $\Phi_{y\varepsilon}(k) = 0; \forall k$

b) Comment ce résultat s'interprète-t-il ?

c) Trouvez les relations permettant de définir les coefficients du filtre optimal.

d) En déduire la valeur de G(z).

e) Analysez ce résultat, en particulier en termes de causalité et de stabilité

Approfondissement :

- Etudiez le filtre pour le cas : $H(z)= 1+a.z^{-1}$; avec $|a|<1$.
- Regardez comment évoluent les pôles de G(z) en fonction de la puissance du bruit.
- Proposez une implémentation stable de ce filtre.