Wireless Communications (WCO)

Jean-Marie Gorce

Dept Télécommunications,

Services & Usages

Chap.2 – Outils mathématiques

1 : probabilités

2 : signaux aléatoires

3 : théorie de l'estimation

CITI - Dept Télécoms - INSA Lyon

1 – Probabilités

- Probabilité sur $\Omega = \{x_i ; i \in [1; N]\}$

Définitions.

«une loi de probabilité sur Ω est définie par un ensemble de N nombre $p_1, \ldots, p_N$, dans [0,1], tels que : $p_1 + \ldots + p_N = 1$».

«$p_k = P(x_k)$, est la probabilité de l'évènement élémentaire x_k».

« Un évènement A est une partie Ω. Sa probabilité est : $P(A) = \sum_{k; x_k \in A} p_k$

« Soit 2 évènements A_1, A_2 exclusifs, alors $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ ».

« Soient 2 évènements disjoints, A et B, sur Ω_A et Ω_B.
La probabilité conjointe vérifie : $0 \leq P(A, B) \leq 1$ ».

« La probabilité conditionnelle est donnée par : $P(A|B) = \dfrac{P(A, B)}{P(B)}$ *».*

« Formule de Bayes : $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$ *».*

- Variable aléatoire sur $\Re$

Définitions.

«Une fonction réelle f sur R est une densité (de probabilité), si elle est positive, intégrable, et vérifie:. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1$$

«Soit f une densité. Sa fonction de répartition est : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt$

Elle est croissante, continue, et vérifie :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \text{ ».}$$

« On note L^1 (resp L^2), l'ensemble des v.a.r. X telles que E(|X|)<+∞ (resp. $E(|X|^2)<+\infty$).»

« Une v.a.r. X (Ω→R) est continue si il existe une densité f_X, telle que:

$$\forall x \in R; F_x(x) = P(X \in]-\infty; x[) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\cdot dt$$

CITI - Dept Télécoms - INSA Lyon

- Moments d'1v.a.

Moyenne : $E(X) \equiv m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$

Ecart-type : $\sigma_x^2 = E\left((X - m_x)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) \cdot dx = E\left(X^2\right) - m_x$

Moments d'ordre k : $E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx$

Moments centrés d'ordre k : $E\left((X - m_x)^k\right)$

- Fonction caractéristique : $\Psi(j\nu) \equiv E\left(e^{j\nu X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\nu x} \cdot f(x) \cdot dx$

  – Propriété fondamentale :

$$E\left(X^k\right) = (-j)^k \left. \frac{d^k \Psi(j\nu)}{d\nu^k} \right|_{\nu=0}$$

- Combinaison de variables aléatoires

Fonction de répartition conjointe : $F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2)\cdot dt_1 \cdot dt_2$

La densité est donc : $f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F(x_1, \cdots, x_n)$

Indépendance : $f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)$

Densités conditionnelles et formule de Bayes s'appliquent : $f(x_1, x_2) = f(x_1 | x_2)\cdot f(x_2)$

Vecteurs aléatoires et changement de variables

$\underline{y} \equiv (y_1 \quad \cdots \quad y_k)^t ; \underline{x} \equiv (y_1 \quad \cdots \quad y_k)^t$

$y_i = g_i(\underline{x}) \quad ; x_j = g_j^{-1}(\underline{y})$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_n} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_n} & & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$f_{\underline{y}}(\underline{y}) = |J| \cdot f_{\underline{x}}\left(x_1 = g_1^{-1}(\underline{y}); x_2 = g_2^{-1}(\underline{y}); \cdots ; x_n = g_n^{-1}(\underline{y})\right)$$

- Les lois importantes

  - **loi (épreuve) de Bernouilli ; Loi Binomiale**
  - **Loi uniforme**
  - **Loi Normale (gaussienne)**
    - **Théorème central limite**
    - **Lois multivariables**
  - **Loi du Khi-2**
  - **Loi de Rayleigh**
  - **Loi de Rice**
  - **Loi de Nakagami-m**
  - **Loi log-normale**

2 – Signaux aléatoires

Définitions.

«x(t) est un processus aléatoire sur Ω.

Ω est l'ensembles des signaux réalisables du processus ».

Stationnarité : x(t) est stationnaire au sens strict ssi :

$$f\left(x(t)\right) = f\left(x(t+\tau)\right)$$

Moments : $$E\left(X^k\right) = E\left(X_{t_i}^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\left(t_i\right) \cdot f\left(x\left(t_i\right)\right) \cdot dx$$

$$E\left(X_{t_1}^k X_{t_2}^l\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\left(t_1\right) \cdot x^l\left(t_2\right) \cdot f\left(x\left(t_1\right), x\left(t_2\right)\right) \cdot dx\left(t_1\right) \cdot dx\left(t_2\right)$$

Corrélation d'un processus ergodique :

$$\Phi_{xx}(\tau) = E\left(X_t X_{t-\tau}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t-\tau) \cdot f\left(x(t), x(t-\tau)\right) \cdot dx(t) \cdot dx(t-\tau)$$

Comparez à la corrélation d'un signal déterministe???

- Corrélation

Intercorrélation.

«pour des signaux stationnaires :

$$\Phi_{xy}(-\tau) = \Phi_{yx}(\tau) = E\big(x(t)x(t+\tau)\big)$$

L'indépendance statistique des v.a. s'étend aux processus. On dit de 2 processus x(t) et y(t) qu'ils sont décorrélés si:

$$\Phi_{xy}(\tau) = E\big(x(t)\big) \cdot E\big(y(t)\big)$$

Processus stochastique complexe :

(cas des signaux en b.b.)

$$Z(t) = X(t) + j \cdot Y(t)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{zz}(\tau) &= \frac{1}{2} E\big(z(t) z^*(t+\tau)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left[\Phi_{xx}(\tau) + \Phi_{yy}(\tau) + j \cdot \Phi_{yx}(\tau) - j \cdot \Phi_{xy}(\tau)\right]\end{aligned}$$

- Densité spectrale de puissance

Définition.

«la transformée de Fourier d'un signal infini n'est pas définie »

La DSP d'un processus aléatoire est définie par :

$$\Phi(f) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \cdot d\tau$$

On peut étendre cette définition à l'intercorrélation.Le spectre de densité de puissance croisée (cross-power density spectrum)

Réponse à un système linéaire : $\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot \Phi_{xx}(f)$

Signaux échantillonnés

$$\Phi(f) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(k) \cdot e^{-j2\pi fk}$$

$$\Phi(k) = \int_{-1/2}^{+1/2} \Phi(f) \cdot e^{j2\pi fk} \cdot df$$

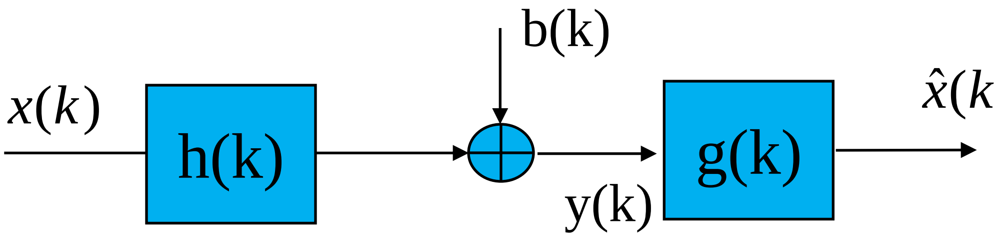
3 – Estimation

CITI - Dept Télécoms - INSA Lyon

Position du problème général

Problème inverse:

« retrouver un vecteur de paramètres à partir d'une observation bruitée».



$\boxed{g(k)=??}$

- Les estimateurs
  - Principe : maximiser / minimiser un critère $J(\theta)$ en fonction d'un jeu de paramètres .

– Critère moindres carrés (MSE):

Si on fait l'hypothèse d'un système linéaire, les paramètres à estimer sont les paramètres du filtre de réception : $\theta \equiv g$

$$J(\theta) = E\left(\left(x(k) - \hat{x}(k)\right)^2\right)$$

$$J(\theta) = \sum_k \left|x(k) - \hat{x}(k)\right|^2$$

avec: $\hat{x}(k) = \sum_n g(n) \cdot y(k-n)$

on obtient : $G(z) = \dfrac{H^*\left(z^{-1}\right)}{H(z) \cdot H^*\left(z^{-1}\right) + \sigma_N^2}$

– Vraisemblance (MLSE):

Définition : « *la vraisemblance se défini comme la probabilité d'observer une certaine réalisation, pour un ensemble de paramètres fixées* ».

$$L(\theta) = P(Y|\theta)$$

Ici, les paramètres sont définis par l'entrée : $\theta \equiv x$

$$\tilde{y}(k) = \sum_n h(n) \cdot \tilde{x}(k-n)$$

Si le bruit est gaussien : $J(\theta) = \ln\left(P\left(Y \middle| \tilde{X}\right)\right) = \left\| y - \tilde{y} \right\|^2$

$$\hat{x} = \underset{\tilde{x} \in \Omega}{\arg\min}\left(\left\| y - \tilde{y} \right\|^2\right)$$

on obtient : $\hat{X} = \left(H^t \cdot H\right)^{-1} \cdot H \cdot Y$

– Maximum a Posterori (MAP):

Définition : « *la probabilité a posteriori* $P(\theta|Y)$ *est la probabilité associée à un ensemble de paramètres, étant donnée une certaine observation*».

On utilise la formule de Bayes : $P(\theta|Y) = \dfrac{P(Y|\theta)\cdot P(\theta)}{P(Y)}$

On prend encore $\theta \equiv x$

Le critère du MAP est : $\hat{x} = \arg\max_{\tilde{x}\in\Omega}\left(P(\theta|Y)\right)$

Si θ est équiprobable : $MAP(\theta) = L(\theta)$