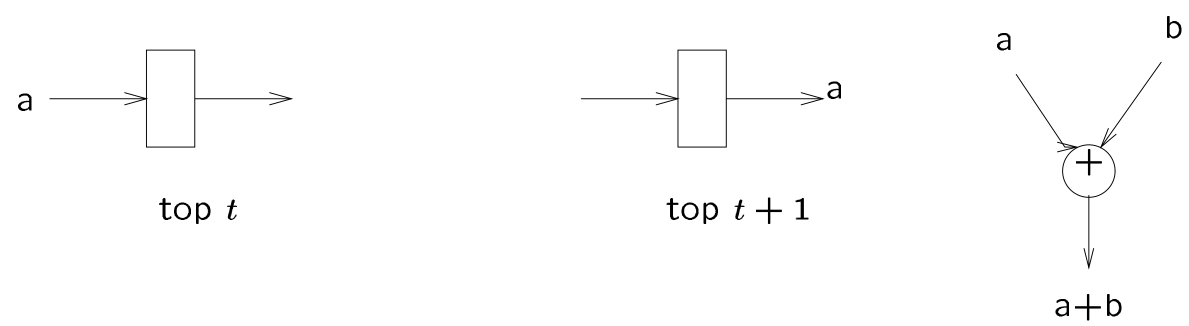
Le modèle des circuits synchrones

- circuits constitués de composants simples (registres, opérateurs)
- circuits cadencés par une horloge globale
- l'horloge commande le chargement des registres



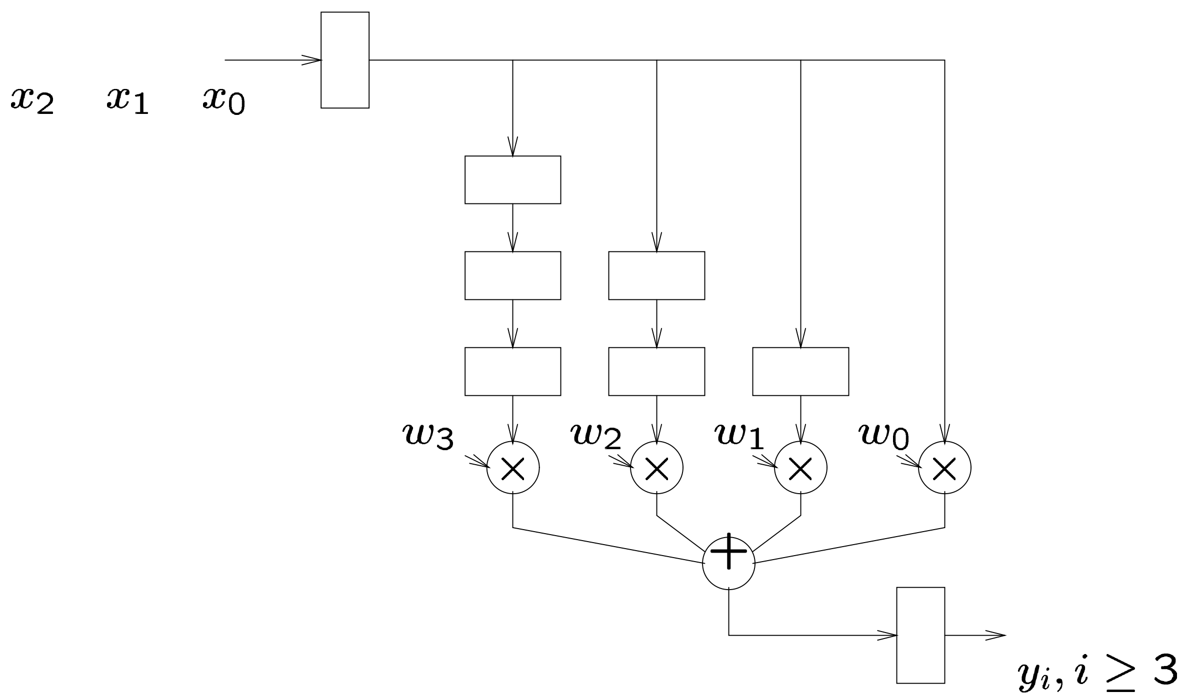
Le produit de Convolution

$$i \geq 3 \rightarrow y_i = \Sigma_{k=0}^{3} \; w_k x_{i-k}$$

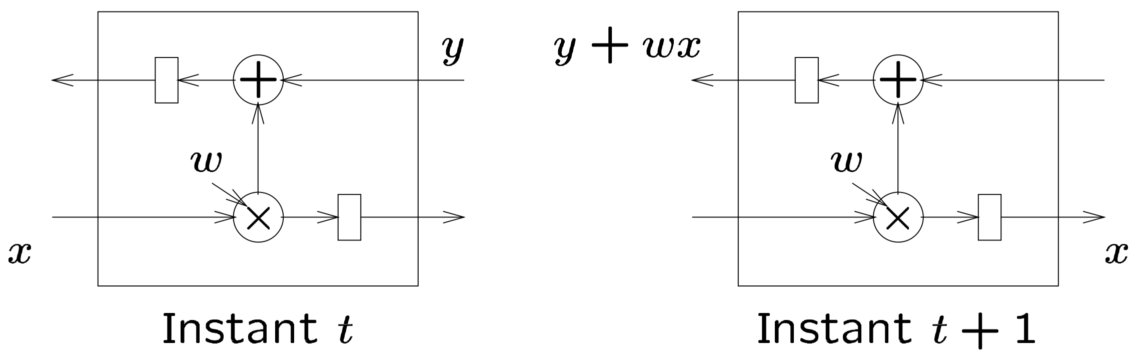
$$\begin{array}{cccccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & . & . & . \\
w_3 & w_2 & w_1 & w_0 & & & & \\
 & & & y_3 & y_4 & . & . & .
\end{array}$$

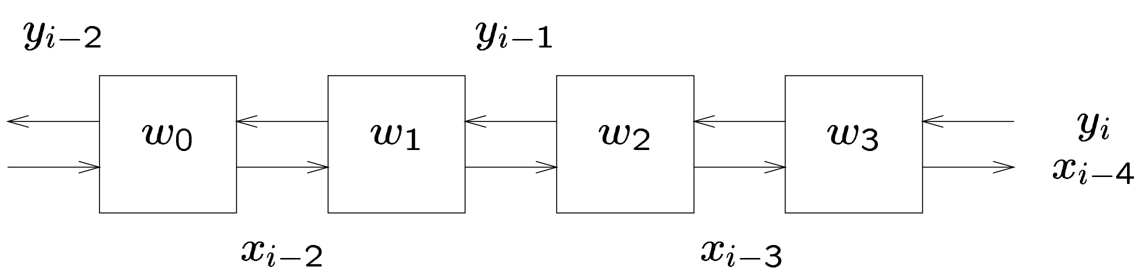
Solution naïve

$$i \geq 3 \rightarrow y_i = \Sigma_{k=0}^{3} w_k x_{i-k}$$

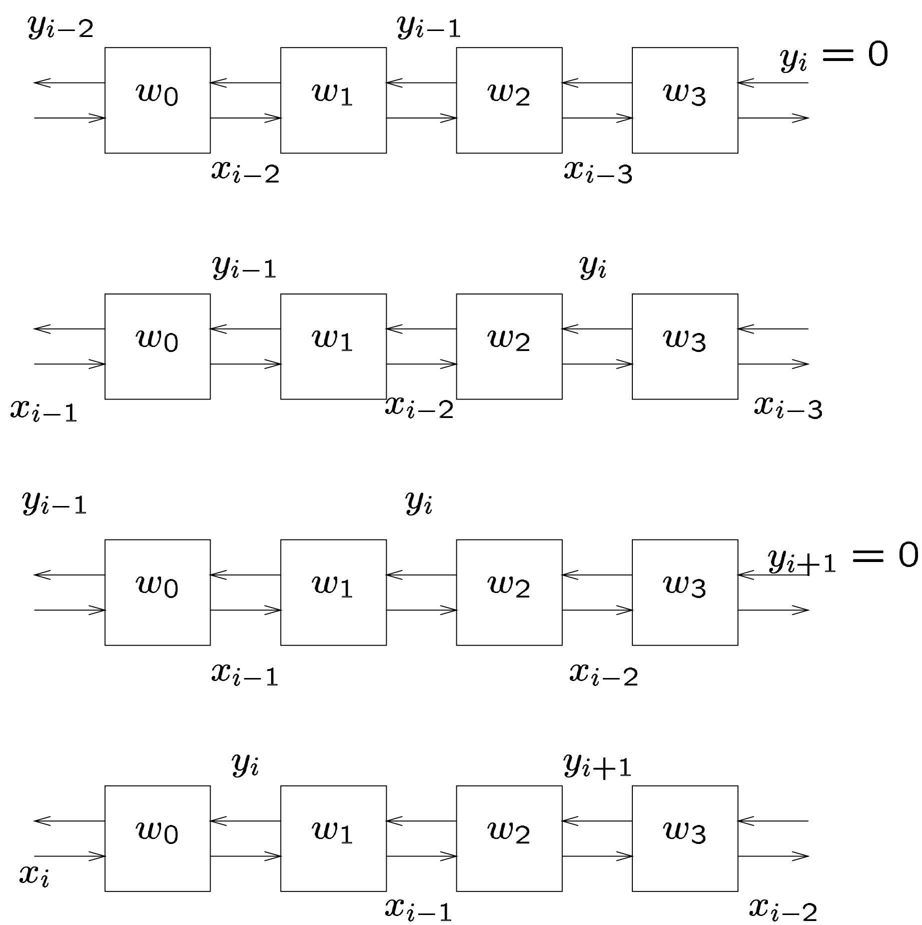


Convolution systolique





Fonctionnement de la convolution systolique



Caractéristiques d'une architecture systolique

- Architecture spécialisée
- Architecture parallèle
- Fonctionnement synchrone (horloge commune)
- Topologie régulière
- Communications locales
- Calcul sur des flots de données qui circulent

Intérêt pour la conception des circuits intégrés ASIC.

- Spécialisation $\Rightarrow$ augmentation performances, et faible encombrement
- Parallélisme $\Rightarrow$ augmentation performances
- Horloge commune $\Rightarrow$ conception classique, simplicité
- Communications locales $\Rightarrow$ Absence de bus, moins de problèmes électriques
- Régularité $\Rightarrow$ Réplication d'éléments simples, simplification mise au point et test
- Circulation des données $\Rightarrow$ utilisation au vol des données, moins de problèmes d'E/S
- Modularité $\Rightarrow$ débit indépendant de la taille du problème

Intérêt pour la conception de programmes parallèles

Calcul systolique vu comme un principe pour la programmation des machines SIMD, MIMD à mémoire distribuée, etc.

Comportement des algorithmes systoliques
complètement prévisible statiquement

- $\Rightarrow$ analyse simplifiée
- $\Rightarrow$ méthodes automatiques de synthèse
- $\Rightarrow$ recherche systématique des versions performantes

Domaines d'application du systolique

- Traitement du signal
  - transmission (compression, codage, cryptage)
  - traitement d'image, de la parole, video (TVHD)
  - radar, sonar

- Traitement de données symboliques
  - bases de données
  - comparaison de séquences

- Calcul scientifique
  - algorithmique numérique
  - calcul formel

Algorithmes “systolisables” (Liste non exhaustive)

- Traitement du signal
  - Convolution 1D (filtrage FIR)
  - Convolution 2D
  - Convolution récursive (filtrage IIR)
  - Corrélation
  - Lissage par médiane
  - DFT, DCT, transformée de Hough
  - Filtrage de Kalman

Algorithmes “systolisables” (suite)

- Algorithmique matricielle
  - Multiplication de matrices
  - Triangulation de matrices
  - Résolution de systèmes linéaires
  - Décomposition QR
  - Décomposition SVD
  - Recherche de valeurs propres

Algorithmes “systolisables” (suite)

- Algorithmes non numériques
  - Structures de données : piles, files, tris, opérations des bases de données
  - Graphes : fermeture transitive, problèmes de cheminement, arbre de degré maximum, composantes connexes, programmation dynamique
  - Traitement de chaînes de caractères : occurences d’un mot dans une chaîne, plus longue sous-chaîne commune, reconnaissance de langages
- Calculs sur les polynômes multiplication, division Euclidienne, PGCD
- arithmétique dans les corps finis

Quelques définitions

Réseau systolique : architecture systolique

Cellule : processeur élémentaire

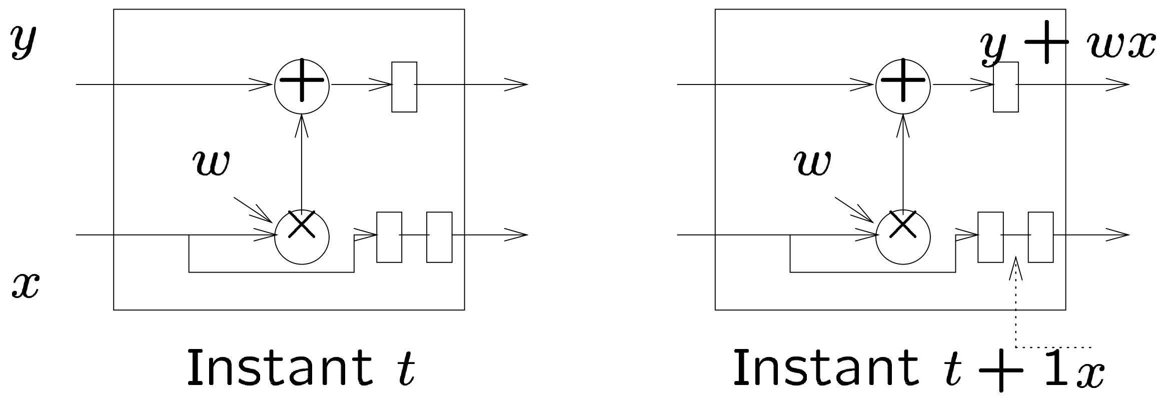
Cycle systolique : calcul élémentaire effectué par les cellules

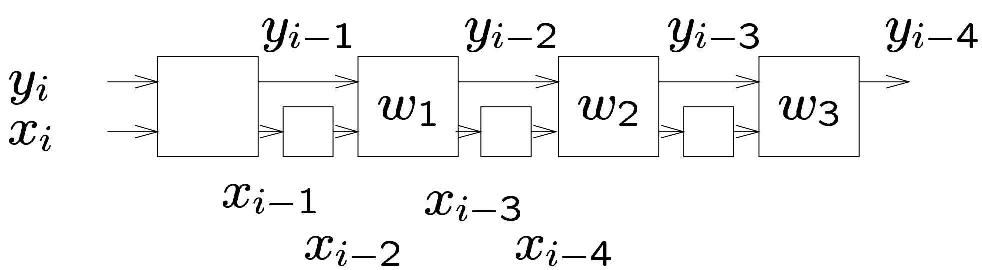
Vitesse d'un flot de données : nombre de cellules traversées par une donnée en un cycle systolique

Période d'un flot : nombre de cycles séparant le passage de deux données successives d'un flot de données dans une cellule

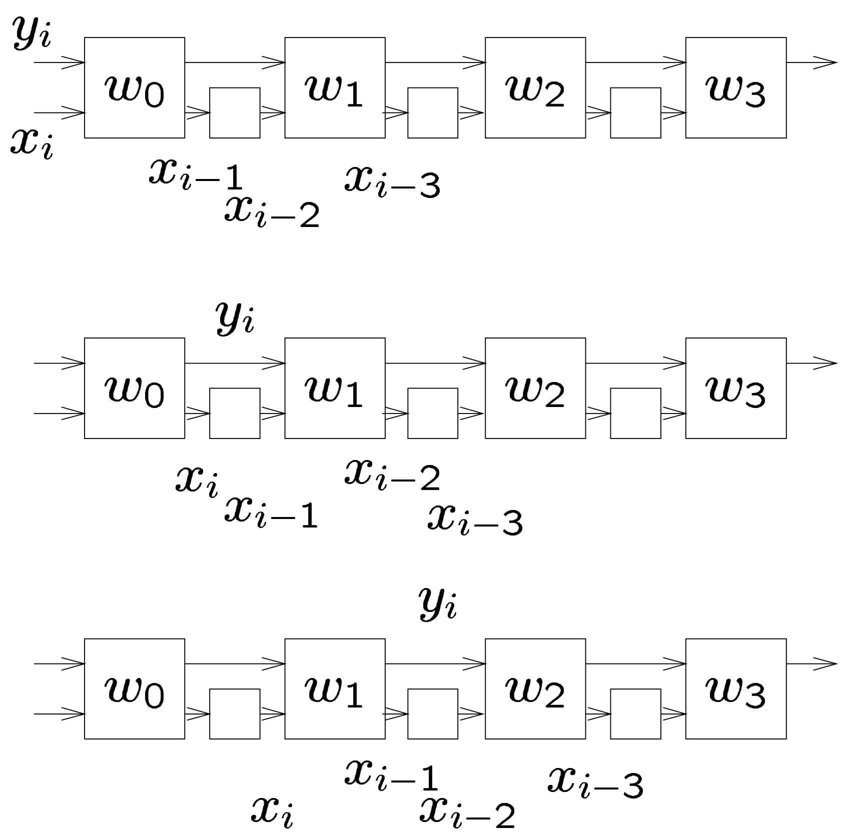
Période d'un réseau : nombre de cycles systoliques séparant deux calculs *utiles* effectués par les cellules

Convolution unidirectionnelle

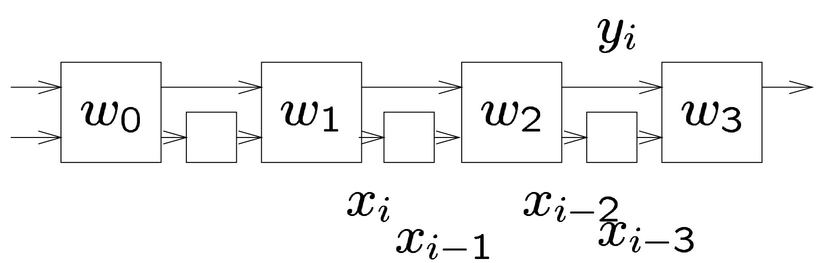


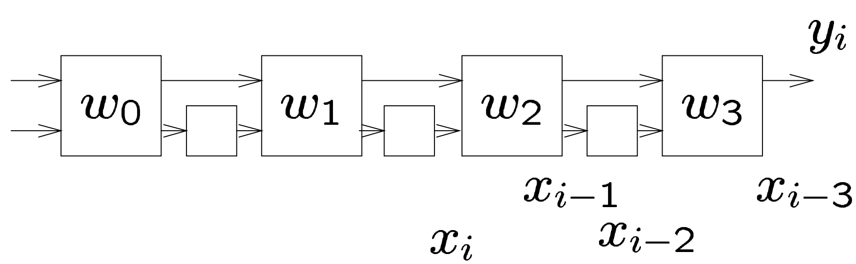


Convolution unidirectionnelle



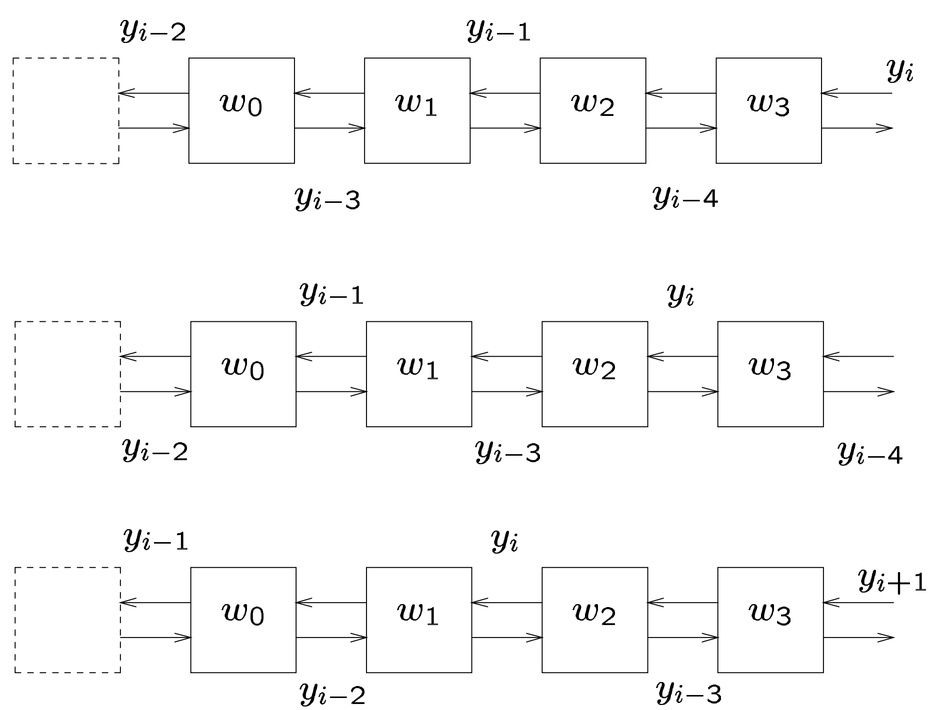
Convolution unidirectionnelle





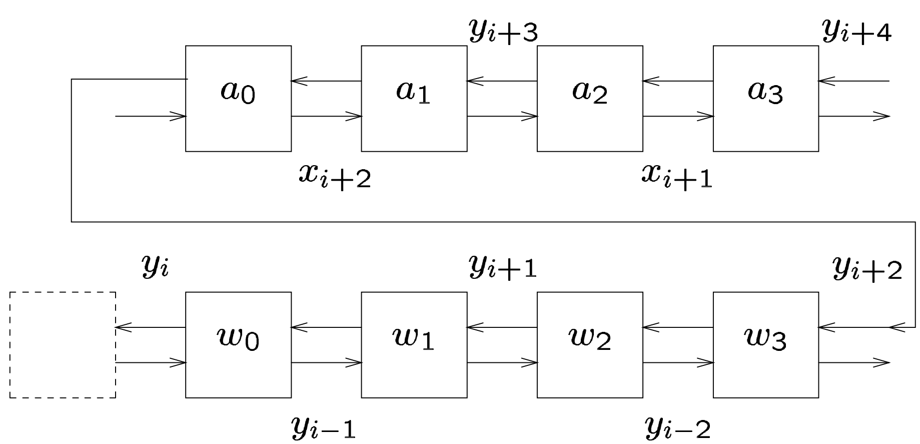
Convolution récursive

$$i \geq 3 \rightarrow y_i = \Sigma_{k=0}^{3} w_k y_{i-k-1}$$



Convolution récursive généralisée

$$y_i = \Sigma_{k=0}^{3} a_k x_{i-k} + \Sigma_{k=0}^{3} w_k y_{i-k-1}$$

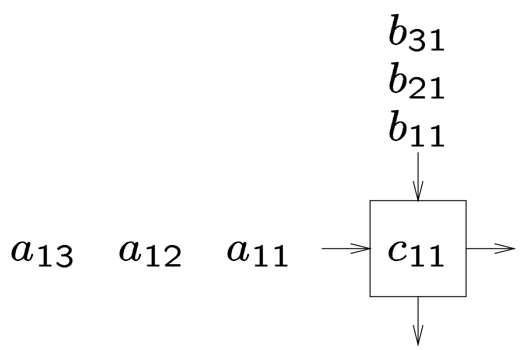


Produit de Matrices Carrées C = A.B

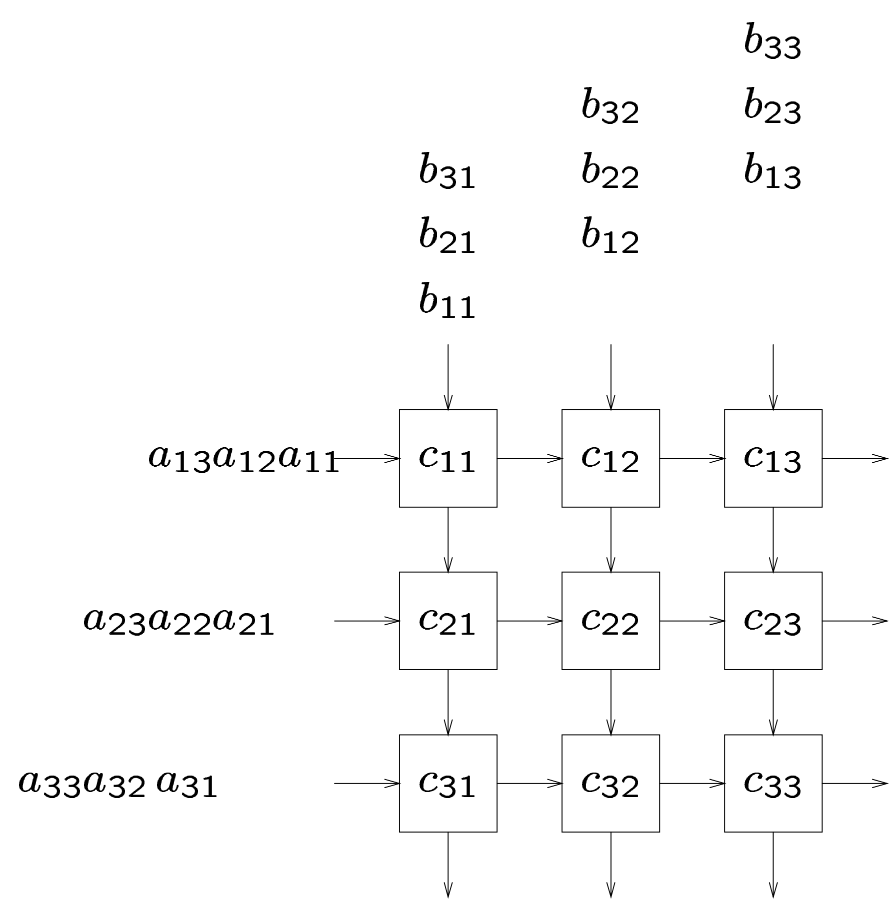
Cellule

$$c' := c + a \times b$$

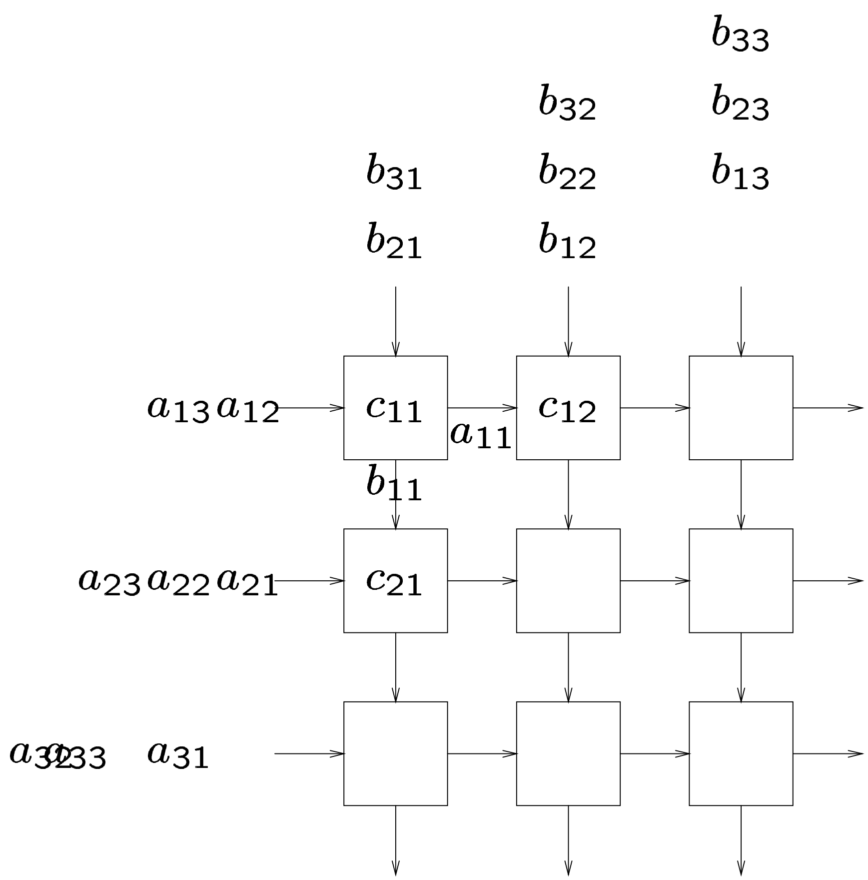
Calcul d'un coefficient



Le réseau carré à l'instant $t = 0$



Le réseau carré à l'instant $t = 1$



Le réseau carré à l'instant $t = 2$

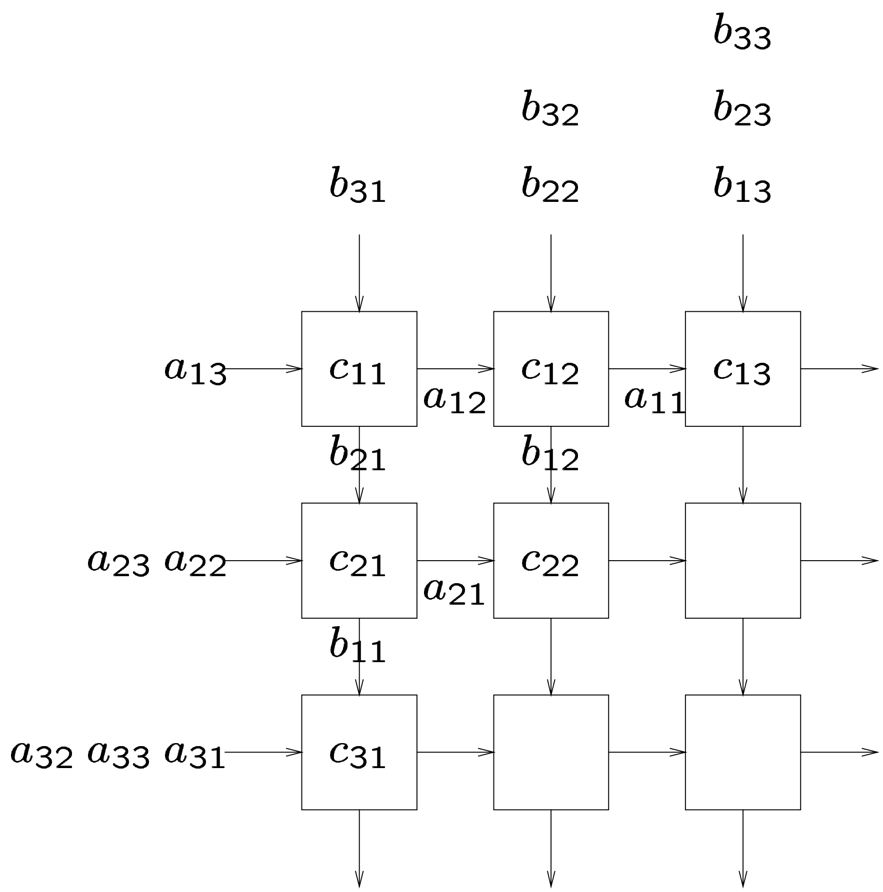
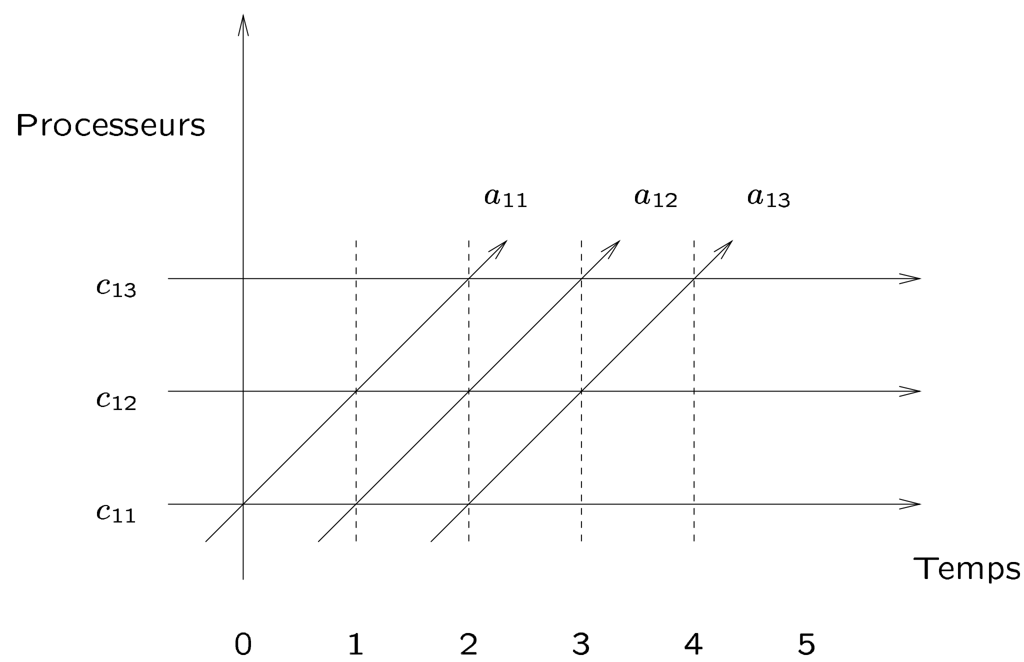
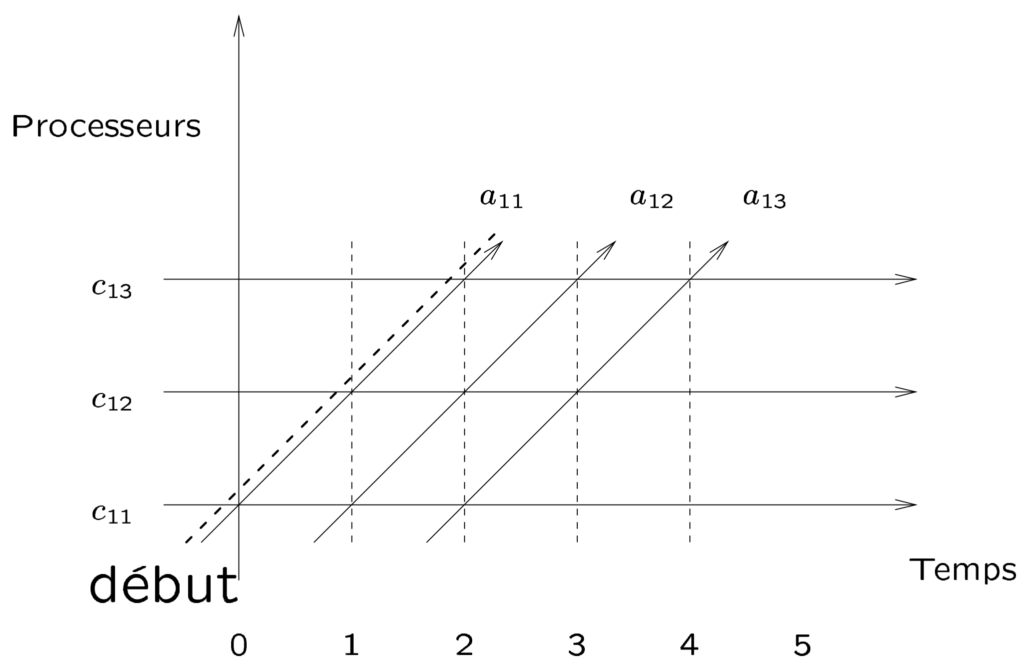


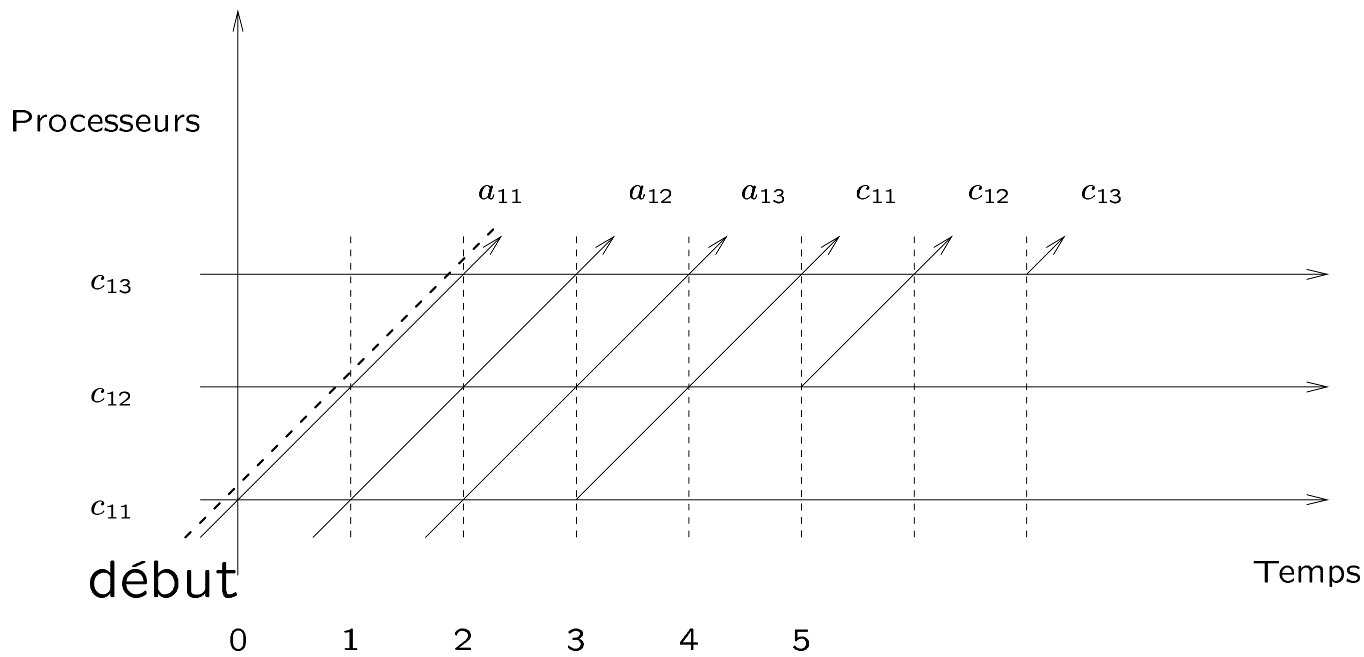
Diagramme espace-temps du réseau



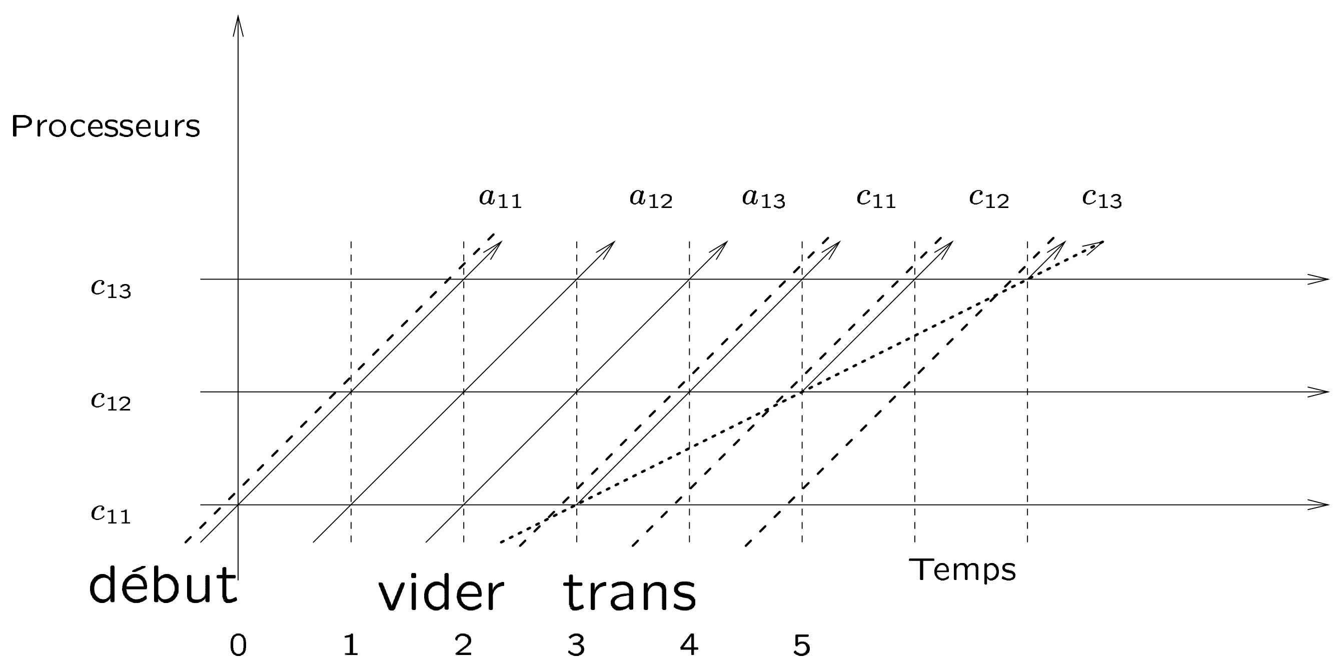
Initialisation



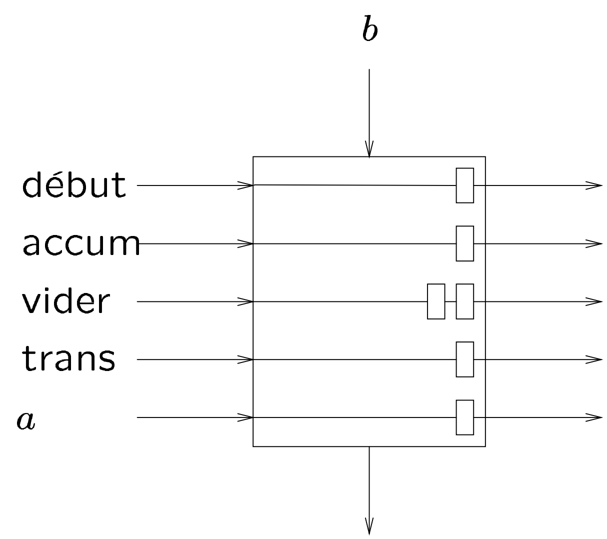
Vidage


Processeurs
a_{11}
a_{12}
a_{13}
c_{11}
c_{12}
c_{13}
c_{13}
c_{12}
c_{11}
début
Temps
0
1
2
3
4
5

Vidage


Processeurs
a_{11}
a_{12}
a_{13}
c_{11}
c_{12}
c_{13}
c_{13}
c_{12}
c_{11}
début
vider
trans
Temps
0
1
2
3
4
5

Détail de la cellule



repeat
case

début	$\rightarrow$	$c := a \times b;$	$a' := a;$	$b' := b;$
accum	$\rightarrow$	$c := c + a \times b;$	$a' := a;$	$b' := b;$
vider	$\rightarrow$	$a' := c;$		
trans	$\rightarrow$	$a' := a;$		

end_case
end_repeat

Synthèse automatique

Synthèse du produit de convolution

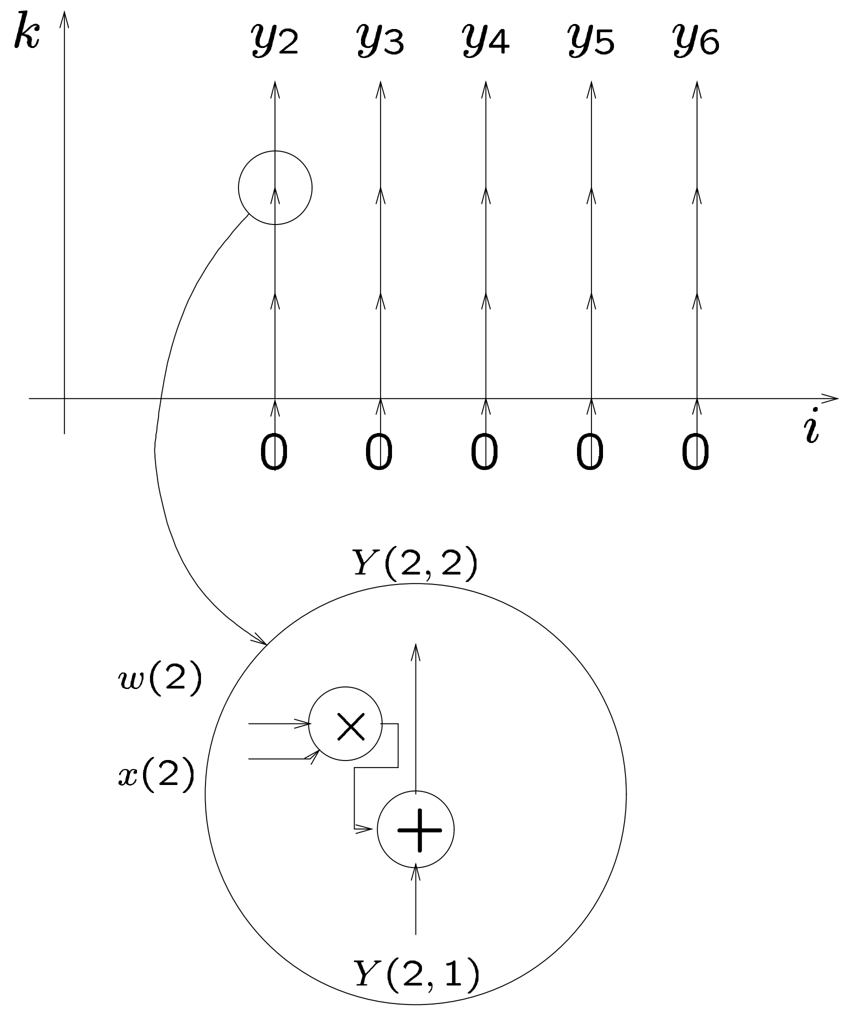
Équation initiale

$$i \geq 2 \rightarrow y(i) = \Sigma_{k=0}^{2}\ w(k)x(i-k)$$

Sérialisation de la somme

$$\begin{array}{rcl} i \geq 2, 0 \leq k \leq 2 & \rightarrow & Y(i,k) = Y(i,k-1) + w(k)x(i-k) \\ i \geq 2, k = -1 & \rightarrow & Y(i,k) = 0 \\ i \geq 2 & \rightarrow & y(i) = Y(i,2) \end{array}$$

Synthèse du produit de convolution



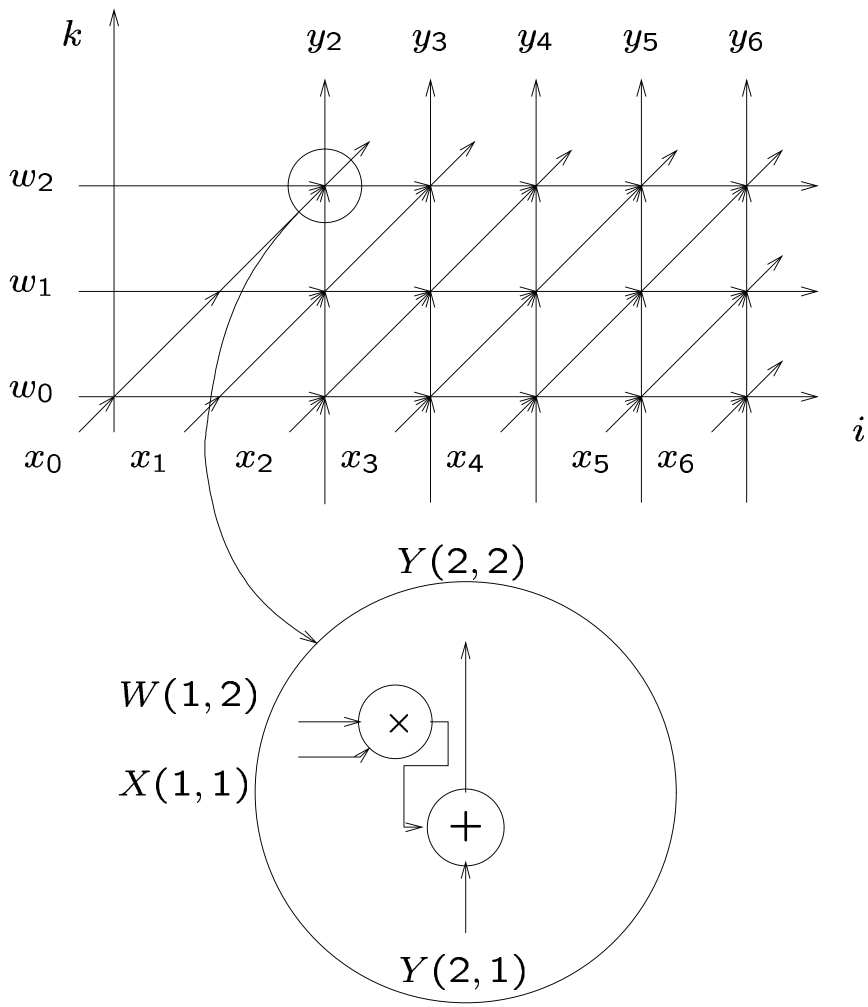
Pipeline

$$i \geq 2, 0 \leq k \leq 2 \quad \rightarrow \quad Y(i,k) = Y(i,k-1) + w(k)x(i-k)$$

devient :

$$\begin{array}{rcl}
i \geq 2, 0 \leq k \leq 2 & \rightarrow & Y(i,k) = Y(i,k-1) + \\
 & & \quad W(i-1,k) \times X(i-1,k-1) \\
i \geq 2, k = -1 & \rightarrow & Y(i,k) = 0 \\
i \geq 2 & \rightarrow & y(i) = Y(i,2) \\
i \geq k, -1 \leq k \leq 1 & \rightarrow & X(i,k) = \left\{ \begin{array}{l} \text{if } k \geq 0 \text{ then } X(i-1,k-1) \\ \text{if } k = -1 \text{ then } x(i+1) \end{array} \right. \\
0 \leq k \leq 2 & \rightarrow & W(i,k) = \left\{ \begin{array}{l} \text{if } i \geq 0 \text{ then } W(i-1,k) \\ \text{if } i = -1 \text{ then } w(k) \end{array} \right.
\end{array}$$

Pipeline



Fonction de temps

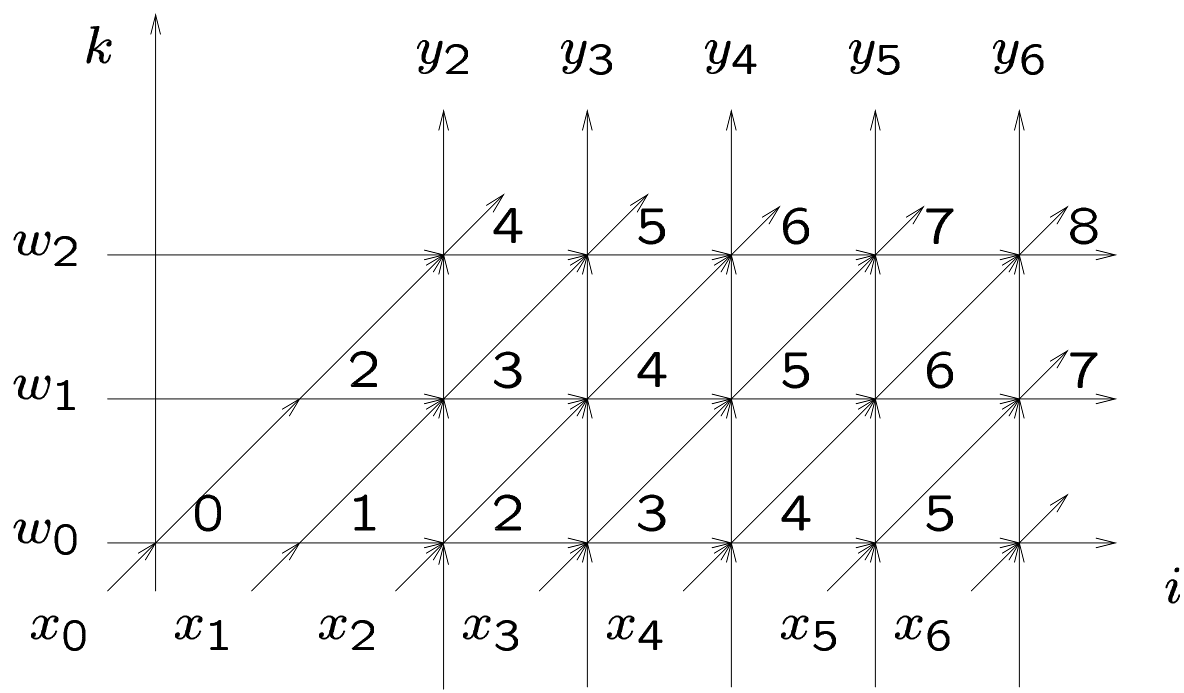
- Principe : le calcul associé au point (i, k) est effectué à l'instant $t(i, k)$, où t est une fonction affine de (i, k)

$$t(i, k) = \lambda_1 i + \lambda_2 k + \alpha$$

- L'ordre doit respecter les dépendances entre calculs

- Linéarité implique régularité (vitesse constante des données)

Fonction de temps

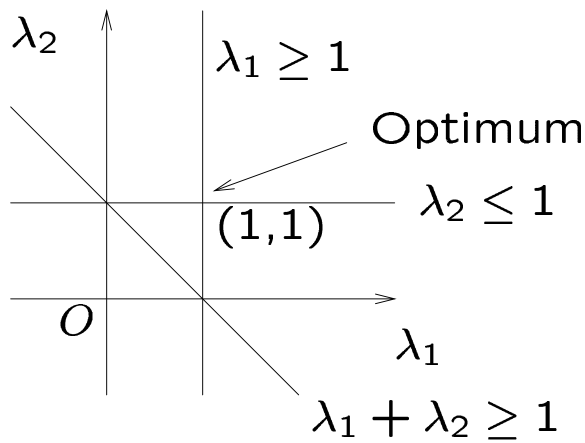


Détermination automatique de t

$$i \geq 2, 0 \leq k \leq 2 \quad \rightarrow \quad Y(i,k) = Y(i,k-1) + W(i-1,k) \times X(i-1,k-1)$$

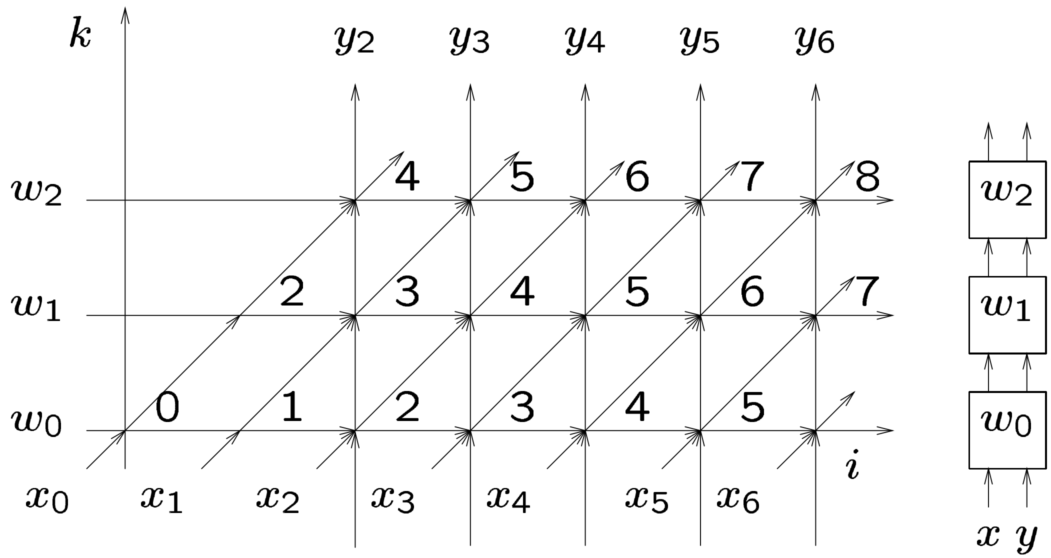
- $Y(i,k)$ dépend de $Y(i,k-1)$
  $t(i,k) \geq t(i,k-1) + 1$, i.e. $\lambda_2 \geq 1$
- $Y(i,k)$ dépend de $W(i-1,k)$
  $\lambda_1 \geq 1$
- $Y(i,k)$ dépend de $X(i-1,k-1)$
  $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$
- α choisi pour que t positive sur le domaine

Détermination automatique de t

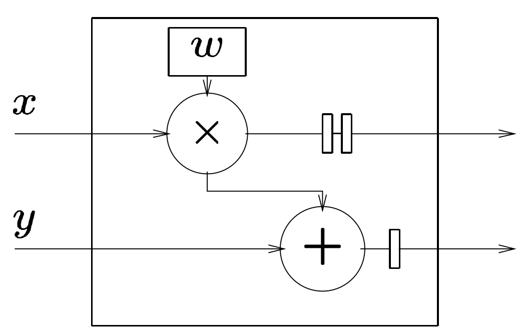


Optimum : $t(i,k) = i + k$ (programmation linéaire en nombres entiers)

Détermination automatique de t



Direction de projection



Produit de matrices

- Équation initiale

$$1 \leq i,j \leq n \to c(i,j) = \Sigma_{k=1}^{n} \ a(i,k)b(k,j)$$

- Sérialisation de la somme

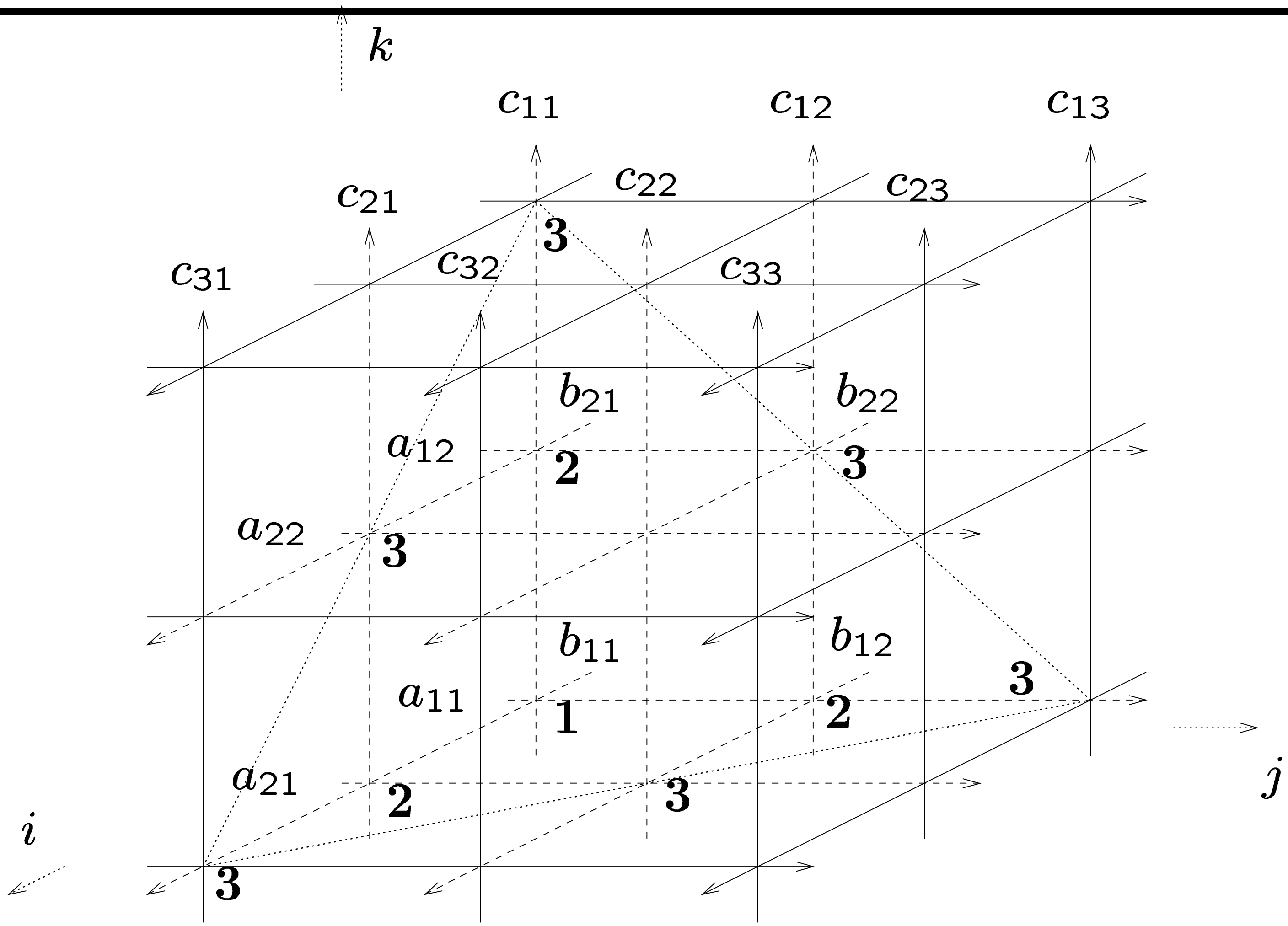
$$\begin{array}{rcl} 1 \leq i,j,k \leq n & \to & C(i,j,k) = C(i,j,k-1) + a(i,k) \times b(k,j) \\ 1 \leq i,j \leq n, k = 0 & \to & C(i,j,k) = 0 \\ 1 \leq i,j \leq n & \to & c(i,j) = C(i,j,n) \end{array}$$

Produit de matrices

– Pipeline de a et b

$$
\begin{array}{rcl}
1 \leq i,j,k \leq n & \rightarrow & C(i,j,k) = C(i,j,k-1) + \\
 & & \quad A(i,j,k) \times B(i,j,k) \\
1 \leq i,j \leq n, k = 0 & \rightarrow & C(i,j,k) = 0 \\
1 \leq i,j \leq n & \rightarrow & c(i,j) = C(i,j,n) \\
1 \leq i,k \leq n & \rightarrow & A(i,j,k) = \begin{cases} \text{if } j \geq 1 \text{ then } A(i,j-1,k) \\ \text{if } j = 0 \text{ then } a(i,k) \end{cases} \\
1 \leq j,k \leq n & \rightarrow & B(i,j,k) = \begin{cases} \text{if } i \geq 1 \text{ then } B(i-1,j,k) \\ \text{if } i = 0 \text{ then } b(k,j) \end{cases}
\end{array}
$$

Graphe de dépendance



Projection suivant axe des k